

# ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ И СГЛАЖИВАЮЩИХ СПЛАЙНОВ В САПР ПОКОВОК КОМПРЕССОРНЫХ ЛОПАТОК

Ковалькова И.Н., Ненашев В.Ю.

Самарский государственный аэрокосмический университет,  
ОНИЛ комплексных САПР лопаток турбомашин, г. Самара

Результаты, полученные в САПР поковок компрессорных лопаток [1], принимаются за исходные данные при проектировании штамповой оснастки. Данный процесс в условиях производства является чрезвычайно трудоемким и малоавтоматизированным.

На стойкость создаваемого штампа большое влияние оказывает шероховатость его рабочей поверхности. Наличие выступов, впадин, изменение кривизны поверхности приводит к интенсивному износу истиранием, появлению задиров и рисок на поверхности поковки. Особенно четко эти дефекты заметны на пера лопатки, что объясняется высокими удельными давлениями и интенсивным течением металла в этой области.

Поскольку исполнительными размерами штампа являются соответствующие размеры поковки, к их проектированию предъявляются повышенные требования. Особенно это касается обводов пера лопатки. На практике плавность поперечных сечений пера обеспечивается путем их визуального сглаживания при пятидесятикратном увеличении.

При разработке САПР поковок самостоятельной задачей является создание программ автоматизированного сглаживания поперечных и продольных сечений пера лопатки. Она возникает как в результате возможных неточностей конструкторского чертежа, так и вследствие технологических требований к чертежам поковок. Припуски по толщине пера реализуются в виде эквидистанты и поэтому автоматически включают в себя негладкость исходного профиля. Наибольшую сложность вызывает назначение припусков на кромки пера. Их величина для разных видов штамповки колеблется от 0,2 мм до 3 мм. В некоторых случаях назначается дополнительный технологический напуск, аналогия мостика открытого штампа, что увеличивает припуски до 10...12 мм. Возникающие при этом кромки продолжения профиля пера (рис.1) в штампе должны сохранить гладкость исходного профиля как в поперечном, так и в продольном направлениях. Таким образом, разработка методов формирования гладкой поверхности пера является актуальной задачей.

## 1. Обзор существующих методов сглаживания данных проектирования

Рассмотрим основные особенности и приемы сглаживания данных с помощью одномерных сплайнов, оказавшихся эффективными при расчетах конструкции поковок компрессорных лопаток.

В отличие от интерполяционных, сглаживающие сплайны возникают при решении задачи о минимизации функционала [2]:

$$J_1(f) = \int_a^b |f''(x)|^2 dx + \sum_{i=0}^N \rho_i^{-1} (f_i - z_i^0)^2,$$

где  $z_i^0$ ,  $\rho_i > 0$  - заданные величины.

Сглаживающий сплайн  $S(x)$  должен удовлетворять условиям:

$$\epsilon_i = |z_i - z_i^0| \leq \delta_i, \quad i = 0, \dots, N \quad (1)$$

или

$$\rho_i |D_i| \leq \delta_i, \quad i = 0, \dots, N, \quad (2)$$

где  $\delta_i$  - допустимый коридор коррекции заданных значений.

Строится итерационный процесс, реализация которого позволяет получить  $M^{(k)}$  и множители  $\rho_i$ ,  $i = 0, \dots, N$ .

$$(A + 6HR^{(k)} H^T) M^{(k)} = 6H^{z0}, \quad (3)$$

$$r_i^{(k+1)} = \begin{cases} d_i / |D_i^{(k)}|, & \text{если } |D_i^{(k)}| \neq 0 \\ 0, & \text{если } |D_i^{(k)}| = 0; \end{cases} \quad (4)$$

где  $k$  - номер итерации.

Для решения систем (3) используется метод исключения. Найдя  $M_i$ , можем рассчитать  $D_i$ :

$$D_i = 1/h_i * (M_{i+1} - M_i) - 1/h_{i-2} * (M_i - M_{i-1}), \quad i = 1, \dots, N.$$

Следующим шагом находится  $z_i$ :

$$z_i = z_i^0 - \rho_i D_i, \quad i = 0, \dots, N.$$

Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока значения сплайна  $z_i$  в узлах сетки не окажутся в коридоре.

При реализации алгоритма на ЭВМ вместо формул (4) можно использовать следующие:

$$r_i^{(k+1)} = \begin{cases} qd_i / |D_i^{(k)}|, & \text{если } |D_i^{(k)}| \geq \delta_i; \\ 0, & \text{если } |D_i^{(k)}| < \delta_i. \end{cases}$$

Однако в работе [2] не приводятся четких рекомендаций по выбору коэффициентов  $\theta$  и  $\lambda$ , что затрудняет практическое применение этого алгоритма.

Для сглаживания исходных данных можно воспользоваться другим алгоритмом, который построен по тем же теоретическим принципам, что и первый, но несколько упрощен [3].

Пусть на сетке  $\Delta: a = x_1 < \dots < x_N = b$  по заданным значениям  $y_i, i=1, \dots, N$ , построен кубический интерполяционный сплайн  $S(x)$ .

$$\text{Функционал} \quad J(S) = \frac{1}{2} \int_a^b |S''|^2 dx \quad (5)$$

является положительной квадратичной функцией. Варьируя в допустимых пределах соответствующие  $N-2$  независимых параметра, можно уменьшить величину этого функционала и получить в таком смысле более гладкий сплайн, чем исходный. Если  $M$  - множество сплайнов  $S$ , проходящих в коридоре:

$$|y_i - y_i^0| \leq \epsilon_i, i = 2, \dots, N-1, \quad (6)$$

где  $\epsilon_i$  - допустимые отклонения исходных данных в  $N-2$  узлах сетки  $\Delta$ , то тогда сплайн  $S_* \in M$ , удовлетворяющий условию:

$$J(S_*) = \min_{S \in M} J(S),$$

в котором  $J(S)$ , определенный по (5), является сглаживающим.

Вариация функционала  $J(S)$  по  $N-2$  независимым перемещениям, для которых образован коридор (6), имеет вид:

$$\delta J = \sum_{i=2}^{N-1} q_i \delta y_i, q_i = (-1)^2 r_i, \delta y_i = y_i - y_i^0, r_i = S_{i+}''' - S_{i-}''' \quad (7),$$

где  $r_i$  - разрыв старшей производной сплайна в узле  $i$  сетки  $\Delta$ .

Очевидно, функционал  $J(S)$  будет уменьшаться, если будут выполняться условия:

$$q_i \delta y_i \leq 0, i = 2, \dots, N-1,$$

позволяющие определить необходимый знак приращения  $\delta y_i$  по знаку  $q_i$ . Так, если  $q_i = 0$ , то  $\delta y_i < 0$ , и наоборот. Если  $q_i = 0$ , то нет разрыва старшей производной сплайна. Отсюда следует, что гладкий сплайн не имеет разрывов старшей производной на  $[a, b]$ .

Эти теоретические принципы положены в основу второго алгоритма построения сглаживающих сплайнов.

Пусть имеется интерполяционный сплайн по исходным данным с краевыми условиями:

$$S_1'' = \alpha S_2'', S_N'' = \beta S_{N-1}'', \alpha, \beta \in [0, 1].$$

На первой итерации по заданным значениям  $y^{(i)} = y_i^0, i = 2, \dots, N-1$  строится исходный сплайн и вычисляются коэффициенты  $q_i$ .

На следующих итерациях узловые значения сплайна вычисляются по формуле:

$$y_i^{(k)} = y_i^{(k-1)} - \frac{\varepsilon_i}{m} \frac{q_i^{(k-1)}}{\max_j |q_j^{(k-1)}|}, i, j = 2, \dots, N-1,$$

где  $m$  - назначаемое целое число, определяющее погрешность построения сглаживающего сплайна. Далее строится соответствующий сплайн.

На каждой итерации контролируется условие:

$$|y_i^{(k)} - y_i^0| \leq \varepsilon, i = 2, \dots, N-1$$

и если оно нарушается в узле  $i$ , то в нем принимается соответствующее предельное значение координаты. Поскольку узлы с  $q_i = 0$  не отпускаются, то проверяется основное условие формирования сглаживающих сплайнов:  $\delta J \leq 0$ . Если оно нарушается, то шаг итерации дробится, т.е. вместо числа  $m$  принимается  $2m$ , и вновь строится сплайн. Эта операция может продолжаться до  $8m$ .

## 2.Метод сглаживания для САПР поковок компрессорных лопаток

В работе предлагается алгоритм сглаживания интерполяционными кубическими сплайнами, которыми описывается массив узловых точек с искусственно создаваемыми пробелами. По этому алгоритму последовательно корректируется положение каждой точки массива, кроме крайних, вдоль одной из осей. На рис. 1 показана графическая модель сплайна.

Пусть в данный момент корректируется положение точки  $A$ . На первом этапе эта точка исключается из общего массива, в результате чего образуется 1 - й пробел. Интерполяционный сплайн 1, построенный по оставшимся узловым точкам, показывает величину ее коррекции. На следующих этапах длина пробела увеличивается за счет включения в него нарастающего числа точек. Возникающие при этом новые сплайны (2,3...i) позволяют рассчитать поэтапную коррекцию. Значение этой величины принимается равным среднеарифметическому ее поэтапных величин. Выбор длины максимального пробела зависит от кривизны профиля и шага базовых точек.



0.80	2.2255	2.2	2.2121	2.2169	2.2238
0.85	2.3396	2.3	2.3311	2.3276	2.3485
0.90	2.4596	2.5	2.4557	2.4788	2.4734
0.95	2.5857	2.6	2.5849	2.6042	2.5925
1.00	2.7183	2.7	2.7186	2.7000	2.7000
Значение функционала		5910.3	96.9	990.5	67.5
Количество итераций			32	30	6

Из таблицы видно, что хорошие результаты сглаживания достигаются при расчетах по 1-му и 3-му алгоритмам. Это согласуется с численными значениями функционалов. Следует отметить, что расчеты по 3-му алгоритму приводят к удовлетворительным результатам за меньшее количество итераций, т. е. его сходимость является максимальной.

Разработанный алгоритм был использован в САПР поковок компрессорных лопаток. При проектировании поковок значение коридора смещения узловых точек профиля целесообразно брать пропорциональным величине допуска на припуск по спинке и корыту. Этот допуск является не симметричным и задается техническими условиями на поковку по нормали к исходному профилю пера. Его величина зависит от вида технологического процесса. Так при штамповке на высокоскоростных молотах он равен (+0.15; -0.05) мм, а при обычной штамповке - (+1.0; -0.25) мм. Учитывая, что смещение точек при сглаживании осуществляется вдоль координатной оси, алгоритмом предусмотрен пересчет допуска коридора по нормали к профилю на значения допустимого смещения каждой точки вдоль оси сглаживания. В итоге получается не симметричный коридор разной ширины:

$\epsilon_{1k}$  - допустимое смещение  $k$ -й точки профиля в направлении увеличения толщины пера;

$\epsilon_{2k}$  - допустимое смещение  $k$ -й точки профиля в направлении уменьшения толщины пера.

На рисунке 2 приведен профиль сечения пера поковки компрессорной лопатки, сглаженной по предлагаемому алгоритму. Ширина коридора по нормали к профилю принята равной 20% допуска. Припуск по кромкам пера равен 11 мм. Численное значение функционала, характеризующего гладкость профиля:  $J(f)=336,4$ .

Таким образом, предложенный алгоритм линейного сглаживания отличается быстрой сходимостью, достаточно высокой эффективностью и может быть успешно применен в САПР поковок для получения "гладкой" поверхности профиля пера.

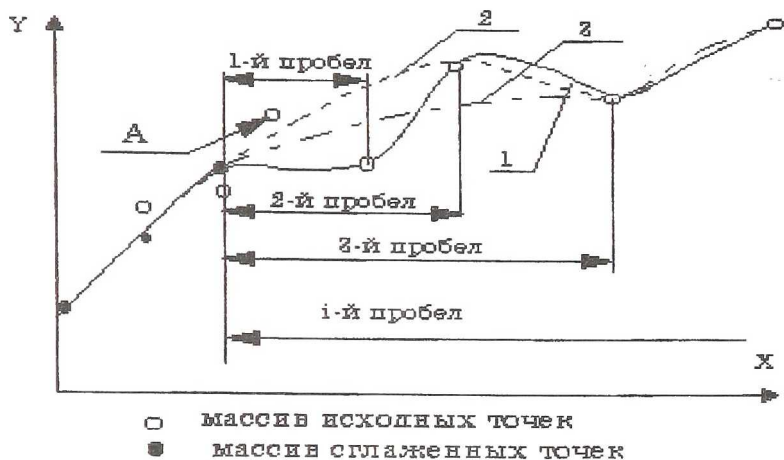


Рис.1 Графическая модель сплайна

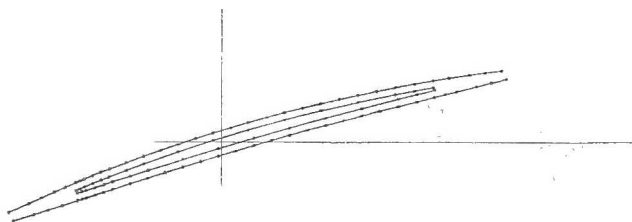


Рис.2 Профиль smoothed сечения пера поковки

#### Список литературы

1. Система автоматизированного проектирования заготовок компрессорных лопаток./Аронов Б.М., Бибииков В.В., Иващенко В.И. и др.: СГАУ, Самара, 1996, 32 с., библиогр.: 4 назв. - Деп. в ВИНТИ 19.12.96, N3712-B96.
2. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. - М.: Наука, 1980, - 350 с.; ил.
3. Методы и программы расчета НДС лопаток./ Мельников М.А., Ушаков А.И., Фатеев В.А. и др. В сб.: Методы расчета напряженно-деформированного состояния лопаток турбомашин.: ЦИАМ, Труды N1177, 1987, - 257-359 с.; ил.
4. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений. - М.: Мир, 1980, - 280 с.; ил.